ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THÚY VIỆT

HỢP VÀ TỔ HỢP LỒI CỦA CÁC TOÁN TỬ KHÔNG GIÃN TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

PHẠM THỊ THÚY VIỆT

HỢP VÀ TỔ HỢP LỒI CỦA CÁC TOÁN TỬ KHÔNG GIÃN TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự quan tâm hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường (Viện Công nghệ Thông tin – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin chân thành gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất đến thầy.

Bên cạnh đó tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo khoa Toán - Tin cùng các quý thầy cô đã trực tiếp giảng dậy lớp cao học Toán K10Y trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu và tạo điều kiện cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Để hoàn thành luận văn này tôi gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp những người đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện để tôi theo học và thực hiện luận văn.

Trong quá trình làm luận văn tôi cũng rất cố gắng nhưng cũng không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các Thầy, các Cô để luận văn của tôi được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 29 tháng 4 năm 2018

Tác giả luận văn

Phạm Thị Thúy Việt

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\|.\|$	chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng
Id	toán tử đồng nhất
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của toán tử T
T^*	toán tử liên hợp của toán tử T
$P_C(x)$	hình chiếu của x lên C
N_C	nón chuẩn của tập con lồi C
$\mathrm{dom} f$	miền hữu dụng của f
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\mathrm{ri}(\mathrm{dom} f)$	tập các điểm trong tương đối của $\mathrm{dom} f$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$L^2[a,b]$	không gian các hàm khả tích bậc 2 trên đoạn $[a,b]$
L_∞	không gian các hàm bị chặn
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C

Mở đầu

Các tính chất của hợp và tổ hợp lồi của các toán tử không giãn trung bình được đề xuất trong bài báo của nhóm hai tác giả: P. Com-Bettes (trường Đại học Sorbonne Universite's - UPMC Univ. Pais06) và Isao Yamada (Học viện công nghệ Tokyo) được nghiên cứu và ứng dụng để thiết kế các thuật toán điểm bất động mới trong không gian Hilbert. Kết quả đạt được là một dạng mở rộng thuật toán tách tiến lùi để tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu.

Các toán tử không giãn đã chứng minh ứng dụng của nó trong giải tích và giải các bài toán số phát sinh trong giải tích phi tuyến tính. Điều này được giới thiệu trong [4].

Các toán tử trung bình là ổn định với các phép hợp và tổ hợp lồi, các toán tử này tạo ra những động lực cơ bản trong nhiều thuật toán điểm bất động kết hợp khác nhau. Các hằng số xác định giá trị của các hàm số trong phương pháp lặp. Đây là điều quan trọng vì các hằng số này nó tác động lớn đến tốc độ hội tụ.

Nội dung luận văn đề cập đến các hằng số trung bình của hợp và tổ hợp lồi các toán tử trung bình và xây dựng lên các thuật toán điểm bất động mới dựa trên những hằng số này.

Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: Giới thiệu một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert thực, toán tử không giãn, toán tử trung bình. Ngoài ra còn trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của phép chiếu lên tập đóng lồi và dưới vi phân của hàm lồi.

Chương 2: Trình bày về hợp và tổ hợp lồi của các toán tử không giãn, toán tử trung bình. Đồng thời nêu ra ứng dụng vào thuật toán tìm điểm bất động và thuật toán tách tiến lùi.

Chương 1

Toán tử trong không gian Hilbert

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và một số khái niệm, định nghĩa của tập lồi, hàm lồi. Đồng thời trình bày về toán tử không giãn và toán tử không giãn trung bình. Các kiến thức trong chương được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3].

1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.1 Một tập X được gọi là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ nếu với mỗi cặp $(x, y) \in X \times X$, một phần tử của X được gọi là tổng của x và y trong X, kí hiệu là $x + y$; với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ và $x \in X$, một phần tử của X được gọi là tích của α và x trong X, kí hiệu là αx thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $x + y = y + x$ với mọi $x, y \in X$;

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ với mọi $x, y, z \in X$;

(iii) Tồn tại phần tử không (kí hiệu: 0) sao cho: $x + 0 = 0 + x, \forall x \in X$;

(iv) Với mọi $x \in X$ ta có: $1.x = x.1$ (1 được gọi là phần tử đơn vị);

(v) Với mọi $x \in X$, tồn tại phần tử đối của x kí hiệu là $-x$ và: $x + (-x) = 0$;

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y, \forall x \in X$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(vii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x \in X$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(viii) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ với mọi $x \in X$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.2 Cho H là không gian véctơ trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong H là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : H \times H &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto (x,y) \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(i) $(x,y) = (y,x)$, $\forall x,y \in H$;

(ii) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$, $\forall x,y,z \in H$;

(iii) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$, $\forall x,y \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $(x,x) > 0$ khi và chỉ khi $x \neq 0$ và $(x,x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Nhận xét 1.1.3 Từ Định nghĩa 1.1.2 ta có:

(i) $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$ với mọi $x,y,z \in H$;

(ii) $(x,\alpha y) = \alpha(x,y)$ với mọi $x,y \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.4 Cặp $(H, \langle .,. \rangle)$, trong đó H là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle .,. \rangle$ là tích vô hướng trên H được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lý 1.1.5 (Bất đẳng thức Schwarz) *Trong không gian tiền Hilbert H với mọi $x,y \in H$ ta luôn có đẳng thức sau:*

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,y \rangle . \langle x,y \rangle .$$

Định lý 1.1.6 *Không gian tiền Hilbert H là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn được xác định bởi:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}, \quad \forall x \in H.$$

Định nghĩa 1.1.7 Nếu H là một không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định từ Định lý 1.1.6 thì H được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1.8 Không gian

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad y = (y_n)_n \in l^2$$

và chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 1.1.9 Không gian $L^2[a,b]$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \forall x, y \in L^2[a,b],$$

và chuẩn

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Định nghĩa 1.1.10 Trong không gian Hilbert H

(i) Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ yếu đến phần tử $x \in H$ nếu

$$\lim \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

(ii) Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ mạnh đến phần tử $x \in H$ nếu

$$\lim \|x_n - x\| = 0.$$

Kí hiệu $x_n \rightharpoonup x$ chỉ sự hội tụ yếu, $x_n \to x$ chỉ sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ đến phần tử $x \in H$.

Chú ý 1.1.11 :

(i) Trong không gian Hilbert H, hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu nhưng điều ngược lại không đúng.